2021年中华人民共和国普通高等学校
联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试
数　学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\{x|-1<x<4\}$，$B=\{x|2<x<5\}$,则 $A\cup B=$(　　)

（A）$\{x|-1<x<4\}$　（B）$\{x|-1<x<5\}$　（C）$\{x|2<x<4\}$　（D）$\{x|2<x<5\}$

【答案】B

【解析】考查集合的运算。

2． $z=\dfrac{2-i}{2+i}$ 的共轭复数 $\bar{z}=$(　　)

（A）$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$　（B）$\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$　（C）$\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$　（D）$\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$

【答案】A

【解析】考查复数的运算，$z=\dfrac{2-i}{2+i}=\dfrac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{3-4i}{5}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$，故 $\bar{z}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$。

3．函数 $y=\log_2(1-x^2)$ 的单调递减区间是(　　)

（A）$(-\infty,0)$　（B）$(0,+\infty)$　（C）$(-1,0)$　（D）$(0,1)$

【答案】D

【解析】考查简单复合函数的单调性，同增异减，注意定义域。由 $1-x^2>0\Rightarrow -1<x<1$，故函数的定义域是 $(-1,1)$，又知道 $y=\log_2 t$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故只要考虑函数 $y=1-x^2$ 在定义域 $(-1,1)$ 上的单调递减区间，所以函数 $y=\log_2(1-x^2)$ 的单调递减区间是 $(0,1)$。

4．等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2-a_5+a_8-a_{11}+a_{14}=1$，则 $\{a_n\}$ 的前 15 项和为(　　)

（A）1　（B）8　（C）15　（D）30

【答案】C

【解析】考查等差数列的简单性质与前 n 项和公式，由 $a_2+a_{14}=a_5+a_{11}$，代入已知可得 $a_8=1$，

故 $S_{15}=15a_8=15$。(也可直接用基本元素结合公式计算，由 $a_n=a_1+(n-1)d$，代入已知可得 $a_1+7d=1$，故 $S_{15}=15a_1+105d=15(a_1+7d)=15$)

5．已知 $\tan x=2$，则 $\dfrac{2\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}=($　　$)$

（A）3　　（B）$\dfrac{5}{3}$　　（C）$\dfrac{3}{5}$　　（D）$\dfrac{1}{3}$

【答案】B

【解析】考查同角三角函数的基本关系，$\dfrac{2\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}=\dfrac{2\tan x+1}{2\tan x-1}=\dfrac{5}{3}$。

6．已知向量 $a=(\cos\theta,\sin\theta)$，$b=(3,-4)$，则 $a\cdot b$ 的最大值是(　　)

（A）7　　（B）5　　（C）4　　（D）1

【答案】B

【解析】考查向量的数量积与三角函数的性质，由 $a\cdot b=3\cos\theta-4\sin\theta=5\sin(\theta+\varphi)$，可知 $a\cdot b$ 的最大值是5。

7．下列函数中为偶函数的是(　　)

（A）$y=\lg(x-1)+\lg(x+1)$　　（B）$y=|\sin x+\cos x|$

（C）$y=x^{\frac{1}{3}}$　　（D）$y=(x+2)^2+(2x-1)^2$

【答案】D

【解析】考查函数的奇偶性，偶函数的定义域关于原点对称，且满足 $f(-x)=f(x)$，四个选项中，D选项的函数化简后 $y=(x+2)^2+(2x-1)^2=5x^2+5$，明显是偶函数。而其它3个选项中A选项定义域不关于原点对称，B选项由图可知非奇非偶，C选项满足 $f(-x)=-f(x)$，是奇函数，故答案选D。

8．已知点 P 在圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 上，则 P 到直线 $x+y-5=0$ 距离的最小值为(　　)

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　（C）$2\sqrt{2}$　　（D）$3\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】考查直线与圆的位置关系，已知圆心为 $(-1,0)$，半径为 $\sqrt{2}$，求出圆心 $(-1,0)$ 到直

线 $x+y-5=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$，则最小距离为 $d-r=2\sqrt{2}$。

9．已知 $a>b>1$，则以下四个数中最大的是(　　)

（A）$\log_b a$　　（B）$\log_{2b} 2a$　　（C）$\log_{3b} 3a$　　（D）$\log_{4b} 4a$

【答案】A

【解析】考查对数运算，$\log_{2b} 2a-1=\log_{2b}\dfrac{a}{b}\Rightarrow\log_{2b}2a=\log_{2b}\dfrac{a}{b}+1$，同理 $\log_b a=\log_b\dfrac{a}{b}+1$，

$\log_{3b}3a=\log_{3b}\dfrac{a}{b}+1$，$\log_{4b}4a=\log_{4b}\dfrac{a}{b}+1$，且 $a>b>1$，故 $\dfrac{a}{b}>1$，函数 $y=\log_{\frac{a}{b}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上

单调递增，故 $\log_{\frac{a}{b}}4b>\log_{\frac{a}{b}}3b>\log_{\frac{a}{b}}2b>\log_{\frac{a}{b}}b>0\Rightarrow\log_{4b}\dfrac{a}{b}<\log_{3b}\dfrac{a}{b}<\log_{2b}\dfrac{a}{b}<\log_b\dfrac{a}{b}$，

所以 $\log_{4b}4a<\log_{3b}3a<\log_{2b}2a<\log_b a$， 故选A。(本题也可用特殊值法解，取 $a=4,b=2$)

10．3 位男同学与 3 位女同学随机排成一行，其中两端都不是女同学的概率为(　　)

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{4}$　　（C）$\dfrac{1}{5}$　　（D）$\dfrac{1}{6}$

【答案】C

【解析】考查古典概型，只考虑两端的位置都是男生，则 $P=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$。(也可用 $P=\dfrac{A_3^2\cdot A_4^4}{A_6^6}=\dfrac{1}{5}$)

11．设 α， β 是两个平面，直线 l 与 α 垂直的一个充分条件是(　　)

（A）$l\,//\,\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$　　（B）$l\perp\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$

（C）$l\subset\beta$ 且 $\alpha\perp\beta$　　（D）$l\perp\beta$ 且 $\alpha\,//\,\beta$

【答案】D

【解析】考查线面垂直的判定定理，注意线面垂直是指直线与平面内的任意一条直线垂直，而判定定理强调垂直平面内的两条相交直线。解决这种类型的问题要求准确的掌握立体几何中的公理、定理，此外也可以数形结合排除错误答案，例如处理本题可放在一个长方体中，把平面 β 固定为下底面，运动 l 与 α，进行分析排除A、B、C三个选项。

12．函数 $y=\cos^2x+\sin x\cos x$ 图像的对称轴是(　　)

（A）$y=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}(k\in Z)$　　（B）$x=\dfrac{k\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8}(k\in Z)$

（C）$x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$　　　　（D）$x=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in Z)$

【答案】A

【解析】考查三解函数的化简与性质，$y=\frac{1}{2}(\cos 2x+1)+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$，由正弦函数 $y=\sin x$ 的对称轴为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，可得 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in Z$

故函数 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$ 图像的对称轴是 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in Z$。

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

13. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 倾斜角为 45° 的直线与 C 交于 A,B 两点，且 $|AB|=8$,则 $p=$____________.

【答案】2

【解析】考查直线与抛物线的位置关系中的焦点弦问题，直线过焦点 $F(\frac{p}{2},0)$，且斜率为 $k=1$，设直线为 $x=y+\frac{p}{2}$，与抛物线交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，与抛物线联立得 $y^2-2py-p^2=0$，则 $y_1+y_2=2p$，所以焦点弦长 $|AB|=x_1+x_2+p=y_1+y_2+2p=4p$，由 $|AB|=8$，所以 $p=2$。

(焦点弦也可以直接用公式 $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}$，其中 θ 为直线的倾斜角)

14. 函数 $f(x)=\sqrt{2^{x+1}-4^x}$ 的定义域是____________.

【答案】$(-\infty,1]$

【解析】考查函数的定义域与指数不等式的解，由 $2^{x+1}-4^x\geq 0$，得 $2^{x+1}\geq 2^{2x}\Rightarrow x\leq 1$，故定义域是 $(-\infty,1]$。

15. 曲线 $y=2x^3-6x^2-18x+7$ 在点 $(-2,3)$ 处的切线方程是_______________.

【答案】$30x-y+63=0$

【解析】考查导函数的几何意义，曲线在某点处的切线斜率等于在该点处的导函数值，由 $y'=6x^2-12x-18$，而切点为 $(-2,3)$，故 $k=f'(-2)=30$，所以切线方程为 $30x-y+63=0$。

16. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx+c\sin x-2$，且 $f(-2)=8$，则 $f(2)=$________________.

【答案】-12

【解析】考查初等函数的对称性，由 $g(x)=ax^3+bx^2+c\sin x$ 是一个奇函数，即 $g(-x)=-g(x)$，又 $f(x)=g(x)-2$，故 $f(x)+f(-x)=g(x)+g(-x)-4=-4$，所以 $f(2)=-4-f(-2)=-12$。

17．三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 底面 ABC，且 $PA=3$，$AB=CB=2$，$AC=2\sqrt{2}$，则侧面 PBC 的面积是_______.

【答案】$\sqrt{13}$

【解析】考查立体几何中的垂直关系的判定，由 $AB=CB=2, AC=2\sqrt{2}$，可得 $BC\perp AB$，又 $PA\perp$ 底面 ABC，所以 $PA\perp BC$，而 $PA\cap AB=A$，所以 $BC\perp$ 面 PAB，从而 $BC\perp PB$，在 ΔPAB 中由 $PA\perp AB$，所以 $PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{13}$，所以 $S_{\Delta PBC}=\dfrac{1}{2}\cdot PB\cdot BC=\sqrt{13}$。

18．双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 P 在直线 $x-y-10=0$ 上，则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的最小值为_____________.

【答案】$5\sqrt{10}$

【解析】考查点关于已知直线的对称点，以及两点之间线段最短，由已知 $c^2=9+16=25$，故 $c=5$，所以 $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，显然在直线 $x-y-10=0$ 的同侧，这时只要求出 $F_2(5,0)$ 关于直线 $x-y-10=0$ 的对称点 F'，$|PF_1|+|PF_2|$ 的最小值等于 $|F'F_1|$；设 $F_2(5,0)$ 关于直线 $x-y-10=0$ 的对称点为 $F'(m,n)$，由轴对称性可知：① F_2F' 的中点 $H(\dfrac{m+5}{2},\dfrac{n}{2})$ 在对称轴上，故 $\dfrac{m+5}{2}-\dfrac{n}{2}-10=0$；② $F_2F'\perp l$，故 $\dfrac{n}{m-5}\times 1=-1$，解得：$m=10, n=-5$，故 $F'(10,-5)$，所以 $|F'F_1|=\sqrt{[10-(-5)]^2+(-5-0)^2}=5\sqrt{10}$，即 $|PF_1|+|PF_2|$ 的最小值为 $5\sqrt{10}$。(这里是也可以结合图形直接观察出 $F'(10,-5)$)

三、解答题：本大题共 4 小题；每小题 15 分，共 60 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

19．记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=2\sqrt{6}$，$b=3$，$\sin^2(B+C)+\sqrt{2}\sin 2A=0$，求 c 及 $\cos B$.

【解析】考查正余弦定理，内角和定理。

【答案】解：由内角和定理 $A+B+C=\pi$，可知 $\sin(B+C)=\sin A$，

又 $\sin 2A=2\sin A\cdot\cos A$，代入已知可得 $\sin A(\sin A+2\sqrt{2}\cos A)=0$，

又由 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，且 $\sin A>0$，解得 $\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\cos A=-\dfrac{1}{3}$，

由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$，

代入已知得方程 $c^2+2c-15=0$，解得：$c=3$ 或 $c=-5$ (舍去)，

由余弦定理得：$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

20．记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_{n+1}=3S_n+2n+4$，且 $a_1=4$.

(1)证明：$\{a_n+1\}$ 是等比数列；

(2)求 S_n.

【解析】(1)考查数列中 S_n 与 a_n 的关系，以及简单的构造法求通项公式；(2)考查数列前 n 项和求法中的分组求和。

【答案】(1)证明：由已知 $S_{n+1}=3S_n+2n+4$，……①

当 $n=1$ 时，有 $S_2=3S_1+6$，又已知 $S_1=a_1=4$，$S_2=a_1+a_2=4+a_2$，

当 $n\ge 2$ 时，$S_n=3S_{n-1}+2n+2$，……②

①－②得：$a_{n+1}=3a_n+2\,(n\ge 2)$，显然 $a_2=3a_1+2$ 也成立.

故 $n\in N^+$ 时有 $a_{n+1}=3a_n+2\Rightarrow(a_{n+1}+1)=3(a_n+1)$，且 $a_1+1=5\ne 0$，

故数列 $\{a_n+1\}$ 为等比数列，首项为 5，公比为 3.

(2)由(1) $a_n+1=5\times 3^{n-1}$，所以 $a_n=5\times 3^{n-1}-1$，所以 $S_n=\dfrac{5\times(1-3^n)}{1-3}-n=\dfrac{5}{2}\times 3^n-n-\dfrac{5}{2}$.

21．已知函数 $f(x)=x^2-6x+4\ln x+m$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，求 m 的取值范围．

【解析】(1)考查导函数求函数的单调性，注意定义域，(2)考查函数在给定区间的最小值。

【答案】解：(1) $f(x)=x^2-6x+4\ln x+m$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2x-6+\dfrac{4}{x}=\dfrac{2(x-1)(x-2)}{x}$．

在区间 $(0,1)$ 上 $f'(x)>0$，$y=f(x)$ 单调递增，在区间 $(1,2)$ 上 $f'(x)<0$，$y=f(x)$ 单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$y=f(x)$ 单调递增；

故函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，$(2,+\infty)$；

函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间为 $(1,2)$；

(2)由(1)知函数 $y=f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 单调递增，

故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 有最小值 $f(2)=4\ln 2-8+m$，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $f(x)>0$，故最小值 $f(2)=4\ln 2-8+m>0$，得 $m>8-4\ln 2$，

所以 m 的取值范围为 $(8-4\ln 2,+\infty)$．

22．设椭圆 $G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与 y 轴正半轴的交点为 B，右焦点为 F，已知 B，F 在 $\odot C:x^2+y^2-2x-2y=0$ 上．

(1)求 G 的方程；

(2)若直线 l 过点 C，交 G 于 M，N 两点，且 C 为线段 MN 的中点，求 $|MN|$．

【解析】

(1)考查椭圆的基本量，(2)考查直线与椭圆的位置关系，中点弦问题与弦长公式。

【答案】解：(1)依题意椭圆的上顶点 $B(0,b)$ 与右焦点 $F(c,0)$ 在圆 C 上，解得 $b=c=2$，

故 $a=\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{2}$，所以椭圆 G 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$．

(2)已知圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 的圆心为 $C(1,1)$，

当 l 斜率不存在时，直线方程为 $x=1$，联立椭圆解得 $y=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，

即 $M(1,\frac{\sqrt{14}}{2})$，$N(1,-\frac{\sqrt{14}}{2})$，这时 C 不是线段 MN 的中点，不合题意；

当 l 斜率存在时，可设斜率为 k，则直线方程为 $y-1=k(x-1)$，

设直线与椭圆的交点坐标为 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立椭圆得 $\begin{cases}x^2+2y^2=8\\ y=kx+(1-k)\end{cases}$，化简得 $(2k^2+1)x^2+4k(1-k)x+[2(1-k)^2-8]=0$

其中 $\Delta=[4k(1-k)]^2-4\cdot(2k^2+1)[2(1-k)^2-8]=8(7k^2+2k+3)>0$，

$x_1+x_2=-\frac{4k(1-k)}{2k^2+1}, x_1\cdot x_2=\frac{2(1-k)^2-8}{2k^2+1}$.

由线段 MN 的中点为 $C(1,1)$，故 $x_1+x_2=2\Rightarrow -\frac{4k(1-k)}{2k^2+1}=2$，解得：$k=-\frac{1}{2}$.

(这里也可以用点差法求直线的斜率)

这时 $|MN|=\sqrt{k^2+1}|x_2-x_1|=\sqrt{k^2+1}\cdot\frac{\sqrt{8(7k^2+2k+3)}}{2k^2+1}=\frac{5}{3}\sqrt{6}$.

综上可知 $|MN|=\frac{5}{3}\sqrt{6}$.