2021年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数 学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\{x|-1<x<4\}$，$B=\{x|2<x<5\}$,则 $A\cup B$=(　　)

（A）$\{x|-1<x<4\}$　（B）$\{x|-1<x<5\}$　（C）$\{x|2<x<4\}$　（D）$\{x|2<x<5\}$

2．$z=\dfrac{2-i}{2+i}$ 的共轭复数 $\bar{z}$=(　　)

（A）$\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$　（B）$\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$　（C）$\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$　（D）$\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$

3．函数 $y=\log_2(1-x^2)$ 的单调递减区间是(　　)

（A）$(-\infty,0)$　（B）$(0,+\infty)$　（C）$(-1,0)$　（D）$(0,1)$

4．等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2-a_5+a_8-a_{11}+a_{14}=1$，则 $\{a_n\}$ 的前 15 项和为(　　)

（A）1　（B）8　（C）15　（D）30

5．已知 $\tan x=2$，则 $\dfrac{2\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}$=(　　)

（A）3　（B）$\dfrac{5}{3}$　（C）$\dfrac{3}{5}$　（D）$\dfrac{1}{3}$

6．已知向量 $a=(\cos\theta,\sin\theta)$，$b=(3,-4)$，则 $a\cdot b$ 的最大值是(　　)

（A）7　（B）5　（C）4　（D）1

7．下列函数中为偶函数的是(　　)

（A）$y=\lg(x-1)+\lg(x+1)$　（B）$y=|\sin x+\cos x|$

（C）$y=x^{\frac{1}{3}}$　（D）$y=(x+2)^2+(2x-1)^2$

8．已知点 P 在圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 上，则 P 到直线 $x+y-5=0$ 距离的最小值为(　　)

（A）$\sqrt{2}$　（B）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　（C）$2\sqrt{2}$　（D）$3\sqrt{2}$

9．已知 $a>b>1$，则以下四个数中最大的是(　　)

（A）$\log_b a$　（B）$\log_{2b} 2a$　（C）$\log_{3b} 3a$　（D）$\log_{4b} 4a$

10．3 位男同学与 3 位女同学随机排成一行，其中两端都不是女同学的概率为(　　)

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{1}{5}$　　（D）$\frac{1}{6}$

11．设α，β是两个平面，直线l与α垂直的一个充分条件是(　　)

（A）$l//\beta$且$\alpha\perp\beta$　　（B）$l\perp\beta$ 且$\alpha\perp\beta$

（C）$l\subset\beta$且$\alpha\perp\beta$　　（D）$l\perp\beta$且$\alpha//\beta$

12．函数$y=\cos^2x+\sin x\cos x$图像的对称轴是(　　)

（A）$y=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in Z)$　　（B）$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}(k\in Z)$

（C）$x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$　　（D）$x=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in Z)$

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

13. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过F倾斜角为45°的直线与C交于A,B两点，且$|AB|=8$,则$p=$____________.

14．函数$f(x)=\sqrt{2^{x+1}-4^x}$的定义域是____________.

15．曲线$y=2x^3-6x^2-18x+7$在点$(-2,3)$处的切线方程是_______________.

16．已知函数$f(x)=ax^3+bx+c\sin x-2$，且$f(-2)=8$，则$f(2)=$________________.

17. 三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$底面ABC，且$PA=3$，$AB=CB=2$，$AC=2\sqrt{2}$，则侧面PBC的面积是_______.

18. 双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，点$P$在直线$x-y-10=0$上，则$|PF_1|+|PF_2|$的最小值为_____________.

三、解答题：本大题共 4 小题；每小题 15 分，共 60 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

19．记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为a，b，c，已知$a=2\sqrt{6}$，$b=3$，$\sin^2(B+C)+\sqrt{2}\sin 2A=0$，求$c$及$\cos B$.

20．记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_{n+1}=3S_n+2n+4$，且$a_1=4$.

(1)证明：$\{a_n+1\}$是等比数列；

(2)求S_n.

21．已知函数 $f\left(x\right)=x^2-6x+4\ln x+m.$

(1)求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(2)当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f\left(x\right)>0$，求 m 的取值范围．

22．设椭圆 $G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与 y 轴正半轴的交点为 B，右焦点为 F，已知 B，F 在 $\odot \mathrm{C}:x^2+y^2-2x-2y=0$ 上．

(1)求 G 的方程；

(2)若直线 l 过点 C，交 G 于 M，N 两点，且 C 为线段 MN 的中点，求 $\left|MN\right|$．

2021年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	C	B	B	D	C	A	C	D	A

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

题号	13	14	15	16	17	18
答案	2	$(-\infty,1]$	$30x-y+63=0$	-12	$\sqrt{13}$	$5\sqrt{10}$

三、解答题：本题共 4 小题，每小题 15 分，共 60 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

19．解：由内角和定理 $A+B+C=\pi$，可知 $\sin(B+C)=\sin A$，

又 $\sin 2A=2\sin A\cdot\cos A$，代入已知可得 $\sin A(\sin A+2\sqrt{2}\cos A)=0$，

又由 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，且 $\sin A>0$，解得 $\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\cos A=-\dfrac{1}{3}$，

由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos A$，

代入已知得方程 $c^2+2c-15=0$，解得：$c=3$ 或 $c=-5$ (舍去)，

由余弦定理得：$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

20．(1)证明：由已知 $S_{n+1}=3S_n+2n+4$，……①

当 $n=1$ 时，有 $S_2=3S_1+6$，又已知 $S_1=a_1=4$，$S_2=a_1+a_2=4+a_2$，

当 $n\ge 2$ 时，$S_n=3S_{n-1}+2n+2$，……②

①-②得：$a_{n+1}=3a_n+2\,(n\ge 2)$，显然 $a_2=3a_1+2$ 也成立.

故 $n\in N^+$ 时有 $a_{n+1}=3a_n+2\Rightarrow(a_{n+1}+1)=3(a_n+1)$，且 $a_1+1=5\ne 0$，

故数列$\{a_n+1\}$为等比数列，首项为5，公比为3.

(2)由(1)$a_n+1=5\times 3^{n-1}$，所以$a_n=5\times 3^{n-1}-1$，所以$S_n=\dfrac{5\times(1-3^n)}{1-3}-n=\dfrac{5}{2}\times 3^n-n-\dfrac{5}{2}$.

21．解：(1)$f(x)=x^2-6x+4\ln x+m$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=2x-6+\dfrac{4}{x}=\dfrac{2(x-1)(x-2)}{x}$.

在区间$(0,1)$上$f'(x)>0$，$y=f(x)$单调递增，在区间$(1,2)$上$f'(x)<0$，$y=f(x)$单调递减，在区间$(2,+\infty)$上$f'(x)>0$，$y=f(x)$单调递增；

故函数$y=f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，$(2,+\infty)$；

函数$y=f(x)$的单调递减区间为$(1,2)$；

(2)由(1)知函数$y=f(x)$在区间$(1,2)$上单调递减，在区间$(2,+\infty)$单调递增，

故当$x\in(1,+\infty)$时，函数$y=f(x)$在$x=2$有最小值$f(2)=4\ln 2-8+m$，

当$x\in(1,+\infty)$时$f(x)>0$，故最小值$f(2)=4\ln 2-8+m>0$，得$m>8-4\ln 2$，

所以m的取值范围为$(8-4\ln 2,+\infty)$.

22．(1)解：依题意椭圆的上顶点$B(0,b)$与右焦点$F(c,0)$在圆C上，解得$b=c=2$，

故$a=\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{2}$，所以椭圆$G$的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2)已知圆$C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$的圆心为$C(1,1)$，

当l斜率不存在时，直线方程为$x=1$，联立椭圆解得$y=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，

即$M(1,\dfrac{\sqrt{14}}{2})$，$N(1,-\dfrac{\sqrt{14}}{2})$，这时$C$不是线段$MN$的中点，不合题意；

当l斜率存在时，可设斜率为k，则直线方程为$y-1=k(x-1)$，

设直线与椭圆的交点坐标为$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立椭圆得$\begin{cases}x^2+2y^2=8\\ y=kx+(1-k)\end{cases}$，化简得$(2k^2+1)x^2+4k(1-k)x+[2(1-k)^2-8]=0$

其中$\Delta=[4k(1-k)]^2-4\cdot(2k^2+1)[2(1-k)^2-8]=8(7k^2+2k+3)>0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{4k(1-k)}{2k^2+1}, x_1\cdot x_2=\dfrac{2(1-k)^2-8}{2k^2+1}$.

由线段MN的中点为$C(1,1)$，故$x_1+x_2=2\Rightarrow -\dfrac{4k(1-k)}{2k^2+1}=2$，解得：$k=-\dfrac{1}{2}$.

(这里也可以用点差法求直线的斜率)

这时$|MN|=\sqrt{k^2+1}|x_2-x_1|=\sqrt{k^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{8(7k^2+2k+3)}}{2k^2+1}=\dfrac{5}{3}\sqrt{6}$.

综上可知$|MN|=\dfrac{5}{3}\sqrt{6}$.