2022年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数　学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x|x^2\in A\}$,则 $A\cap B=($　　$)$

（A）$\{1\}$　　（B）$\{1,2\}$　　（C）$\{1,4\}$　　（D）$\varnothing$

【答案】B

【解析】分析：先求出集合B，再求集合A与集合B的交集；

详解：$B=\{x|x^2\in A\}=\{\pm1,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3},\pm2,\pm\sqrt{5}\}$，故 $A\cap B=\{1,2\}$，选B。

【点睛】本题主要考查集合的基本运算，是一道容易题。

2．已知 $z=\dfrac{2+i}{1+i}$，则 $z+\bar{z}=($　　$)$

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）1　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）3

【答案】D

【解析】分析：先对复数 z 进行分母实数化，再求 z 的共轭复数，最后求两复数之和；

详解：$z=\dfrac{2+i}{1+i}=\dfrac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3-i}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$，$\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$，故 $z+\bar{z}=3$，选D。

【点睛】本题主要考查复数的基本概念与运算法则，是一道容易题。

3．已知向量 $a=(x+2,1+x)$，$b=(x-2,1-x)$，若 $a//b$，则($\quad$)

（A）$x^2=2$　　（B）$|x|=2$　　（C）$x^2=3$　　（D）$|x|=3$

【答案】A

【解析】分析：直接利用向量平行的坐标表示得式，化简即可；

详解：由 $a//b$ 可得，$(x+2)(1-x)=(1+x)(x-2)\Rightarrow x^2=2$，选A。

【点睛】本题主要考查平面向量共线定理，是一道容易题。

4．不等式 $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}-3<0$ 的解集是($\quad$)

（A）$(-1,0)\cup(0,\frac{1}{3})$　　（B）$(-3,0)\cup(0,1)$

（C）$(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$　　（D）$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

【答案】C

【解析】分析：先化分析不等式为一元二次不等式，再求解，注意分母不分0；

详解：原不等式可化为$\frac{1-2x-3x^2}{x^2}<0\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+2x-1>0,\\x\neq 0.\end{cases}$，解得$x<-1$或$x>\frac{1}{3}$，选C。

【点睛】本题主要考查一元二次不等式与分式不等式的解法，是一道基础题。

5．以$(1,0)$为焦点，y轴为准线的抛物线的方程是(　　)

（A）$y^2=x-\frac{1}{2}$　　（B）$y^2=x+1$　　（C）$y^2=2x-1$　　（D）$y^2=2x+1$

【答案】C

【解析】分析：先求出焦点到准线的距离$p=1$，再找到顶点坐标，然后用标准的抛物线方程平移得到所求方程；

详解：由焦点坐标为$F(1,0)$，准线方程为$x=0$，焦准距为$p=1$，且抛物线的顶点坐标为$(\frac{1}{2},0)$，故方程为$y^2=2(x-\frac{1}{2})$，即$y^2=2x-1$，选C。(也可由抛物线的定义解答：设抛物线上任意动点$P(x,y)$，由定义$|PF|=d$，得$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|$，化简可得方程$y^2=2x-1$)。

【点睛】本题主要考查考抛物线的坐标平移(港澳台联考中的单独考点)，属于中档题。

6．底面积为2π，侧面积为6π的圆锥的体积是(　　)

（A）8π　　（B）$\frac{8\pi}{3}$　　（C）2π　　（D）$\frac{4\pi}{3}$

【答案】B

【解析】分析：由底面积公式与侧面积公式，求出底面半径与母线长，再求高，最后算体积；

详解：由$\begin{cases}\pi\cdot r^2=2\pi,\\\pi\cdot r\cdot l=6\pi.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{2},\\l=3\sqrt{2}.\end{cases}$，故$h=\sqrt{l^2-r^2}=4$，故$S=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{8\pi}{3}$，选B。

【点睛】本题主要考查基本几何体的体积与表面积公式，是一道容易题。

7．设x_1和x_2是函数$f(x)=x^3+2ax^2+x+1$的两个极值点，若$x_2-x_1=2$，则$a^2=($　　$)$

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】D

【解析】分析：由极值点是导函数的变号零点，得到二次函数的零点，再由一元二次方程根与系数的关系，化简求值即可；

详解：由 $f'(x)=3x^2+4ax+1$，由题意可知 x_1，x_2 是方程 $3x^2+4ax+1=0$ 的两个不等实根，由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=-\frac{4a}{3}$，$x_1\cdot x_2=\frac{1}{3}$，故 $(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1\cdot x_2$，可得 $(-\frac{4a}{3})^2-4\times\frac{1}{3}=4\Rightarrow a^2=3$，选B。

【点睛】考查函数的极值点与导函数的关系以及一元二次方程的根与系数的关系，属于中档题。

8．已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，若 $f(\frac{\pi}{3})=f(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$，则 $\varphi=($　　$)$

（A）$2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$　　（B）$2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in Z)$

（C）$2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$　　（D）$2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

【答案】D

【解析】分析：先利用 $f(\frac{\pi}{3})=f(-\frac{\pi}{3})$ 求得 $\cos\varphi=0$，即 $\varphi=n\pi+\frac{\pi}{2},(n\in Z)$ 再考虑，$f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ 求分析 n 的奇偶性，得解；

详解：由 $f(\frac{\pi}{3})=f(-\frac{\pi}{3})\Rightarrow\sin(\varphi-\frac{2\pi}{3})=\sin(\varphi+\frac{2\pi}{3})\Rightarrow-\frac{1}{2}\sin\varphi-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi=-\frac{1}{2}\sin\varphi+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$，

故 $\cos\varphi=0$，即 $\varphi=n\pi+\frac{\pi}{2},(n\in Z)$，再考虑 $f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin(n\pi-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，故 $n=2k-1$，

所以 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2},(k\in Z)$，选D。

【点睛】考查三角函数的求值化简、三角函数的图象与性质，属于中档题。

【解析】，

9．函数 $y=2^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 的反函数(　　)

（A）$y=\frac{1}{\log_2 x}(x>1)$　　（B）$y=\log_2\frac{1}{x}(x>1)$

（C）$y=\frac{1}{\log_2 x}(0<x<1)$　　（D）$y=\log_2\frac{1}{x}(0<x<1)$

【答案】A

【解析】分析：求反函数有三个步骤，①求出 $x=\varphi(y)$，②写出反函数 $y=f^{-1}(x)$，③求出原函数的值域，也就是定义域；

详解：由 $y=2^{\frac{1}{x}}\Rightarrow\frac{1}{x}=\log_2 y\Rightarrow x=\frac{1}{\log_2 y}$，故反函数的解析式为 $y=\frac{1}{\log_2 x}$，由 $x>0\Rightarrow\frac{1}{x}>0\Rightarrow y=2^{\frac{1}{x}}>1$，故原函数的值域为 $(1,+\infty)$，所以反函数的定义域为 $(1,+\infty)$，选A。

【点睛】本题主要考查反函数的求法，注意对数函数与指数函数互为反函数，是一道中档题。

10．设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公比为 q，前 n 项和为 S_n，令 $b_n=S_n+2$，若 $\{b_n\}$ 也是等比数列，则 $q=($　　$)$

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{3}{2}$　　（C）$\frac{5}{2}$　　（D）$\frac{7}{2}$

【答案】B

【解析】分析：利用等比数列的前 n 项和公式表示出数列 $\{b_n\}$，再用通项进行计算；

详解：显然公比 $q\neq1$，故 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，故 $b_n=S_n+2=\frac{1}{1-q}+2-\frac{q^n}{1-q}$，又已知 $\{b_n\}$ 也是等比数列，所以 $\frac{1}{1-q}+2=0\Rightarrow q=\frac{3}{2}$，选B。(也可以写出数列 $\{b_n\}$ 的前三项，$b_1=S_1+2=a_1+2=3$，$b_2=S_2+2=a_1+a_2+2=3+q$，$b_3=S_3+2=a_1+a_2+a_3+2=3+q+q^2$，再利用 $b_2^2=b_1\cdot b_3$，且 $q\neq0$，解得 $q=\frac{3}{2}$)

【点睛】本题主要考查等比数列的前 n 项和公式与判定方法，属于中档题。

11．若双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线与直线 $y=2x+1$ 垂直，则 C 的离心率为(　　)

（A）5　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）$\frac{5}{4}$　　（D）$\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】D

【解析】分析：由两直线的垂直引出 a，b 关系，再利用 $a^2=b^2+c^2$，得出离心率；

详解：双曲线的渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 中的一条与直线 $y=2x+1$ 垂直，故 $k_1\cdot k_2=-1$，即 $-\frac{b}{a}\times 2=-1\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{(\frac{b}{a})^2+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，选D。

【点睛】本题主要考查两直线的位置关系及双曲线的渐近线、离心率等概念，是一道中档题。

12. 在 1，2，3，4，5，6，7，8，9 中任取 3 个不同的数，则这 3 个数的和能被 3 整除的概率是(　　)

（A）$\frac{9}{28}$　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{5}{14}$　　（D）$\frac{2}{5}$

【答案】A

【解析】分析：先用组合数公式计算总的取法，再用分类讨论的方法统计和是3的倍数的方案，利用古典概率类型的计算公式算出答案；

详解：总的取法为 $n=C_9^3=84$，按照除以3的余数把这9个数分为3个小组，1，4，7；2，5，8；3，6，9三组。和能被3整除，可分两类，第一类是在其中某小组内部取3个数，这共有3种，第二类是从每个小组中分别各取1个数，则其和也能被3整除，共有 $3\times 3\times 3=27$ 种，故 $n(A)=30$，所以概率 $p=\frac{n(A)}{n}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$，选B。

【点睛】本题主要考查古典概型，及计数原理，属于较难题。

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

13. 曲线 $y=x\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程是_______________.

【答案】$x-y-1=0$

【解析】分析：利用曲线在某点处的切线斜率等于在该点处的导函数值，求出切线的斜率，再利用点斜式求直线的方程；

详解：$y'=(x\ln x)'=\ln x+1$，而切点为 $(1,0)$，故 $k=y'|_{x=1}=1$，切线方程为 $x-y-1=0$，答案：$x-y-1=0$。

【点睛】本题考查导函数的几何意义，直线的点斜式方程，是一道基础题。

14. 已知 O 为坐标原点，点 P 在圆 $(x+1)^2+y^2=9$ 上，则 $|OP|$ 的最小值为____________.

【答案】2

【解析】分析：圆上的动点与圆内定点的最近距离等于点到圆心的距离减半径的绝对值；

详解：圆心为 $M(-1,0)$，故 $|OM|=1$，半径 $r=3$，故 $|OP|_{\min}=||OM|-r|=2$，答案：2。

【点睛】考查点与圆的位置关系，是一道基础题。

15．若 $\tan\theta=3$，则 $\tan 2\theta=$____________.

【答案】$-\dfrac{3}{4}$

【解析】考查正切的二倍角公式，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\dfrac{3}{4}$。

16．设函数 $f(x)=a^x(a>0,且a\neq 1)$是增函数，若 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{f(2)-f(-2)}=\dfrac{3}{10}$，则 $a=$______.

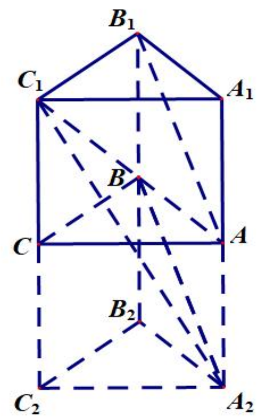
【答案】3

【解析】考查指数函数的单调性及幂的运算，由题意可知 $a>1$，且 $\dfrac{a-a^{-1}}{a^2-a^{-2}}=\dfrac{3}{10}$

即 $\dfrac{a-a^{-1}}{(a+a^{-1})(a-a^{-1})}=\dfrac{3}{10}$，故 $\dfrac{1}{a+a^{-1}}=\dfrac{3}{10}\Rightarrow a+a^{-1}=\dfrac{10}{3}$，解得 $a=3$ 或 $a=\dfrac{1}{3}$(舍去)。

17．在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的大小为_______.

【答案】$\dfrac{\pi}{2}$



【解析】考查立体几何中的两异面直线所成角，如图，在原三棱柱的基础上往下补形，把直线 AB_1 向下平移至 BA_2，连接 A_2C_1，则 $\angle C_1BA_2$ 或其补角中较小的为所求角。由勾股定理易得 $BC_1=BA_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，且 $A_2C_1=\sqrt{3}$，由余弦定理可得 $\cos\angle C_1BA_2=0\Rightarrow\angle C_1BA_2=\dfrac{\pi}{2}$。(也可用空间向量法)

18．设 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，$g(x)$ 是定义域为 R 的偶函数。若 $f(x)+g(x)=2^x$，则 $g(2)=$_____________.

【答案】$\dfrac{17}{8}$

【解析】考查函数的奇偶性，由 $f(x)+g(x)=2^x$，可得 $f(-x)+g(-x)=2^{-x}$，又知 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，故 $-f(x)+g(x)=2^{-x}$，两式相加，得 $g(x)=\dfrac{1}{2}(2^x+2^{-x})$，故 $g(2)=\dfrac{17}{8}$。

三、解答题：本大题共 4 小题；每小题 15 分，共 60 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

19．记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为a，b，c，已知$\sin A=3\sin B$，$C=\frac{\pi}{3}$，$c=\sqrt{7}$．

(1)求a；

(2)求$\sin A$．

【答案】(1)$a=3$；(2)$\sin A=\frac{3\sqrt{21}}{14}$．

【解析】解：(1)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{c}{2R}$，

代入已知得$a=3b$，

由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos C$，故$7=(3b)^2+b^2-2\cdot(3b)\cdot b\cdot\cos\frac{\pi}{3}$，

解得$b=1$，故$a=3$；

(2)由正弦定理可得$\sin A=\frac{a\cdot\sin C}{c}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$．

20．设$\{a_n\}$是首项为 1，公差不为 0 的等差数列，且a_1，a_2，a_6成等比数列．

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$b_n=(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n．

【答案】(1)$a_n=3n-2$；(2)$S_n=\frac{1+(6n-1)\cdot(-1)^n}{4}$(也可表示为$S_n=\begin{cases}\frac{3n}{2}, n\text{为偶数},\\ \frac{1-3n}{2}, n\text{为奇数}.\end{cases}$)．

【解析】解：(1)由题意可设等差数列的公差为d，则$a_n=1+(n-1)d,(d\neq 0)$，

由三项成等比可得$a_2^2=a_1\cdot a_6$，故$(1+d)^2=1\times(1+5d)\Rightarrow d^2-3d=0$，

又已知$d\neq 0$，故$d=3$，所以$a_n=3n-2$；

(2)由(1)知$b_n=(3n-2)\cdot(-1)^n$，

$S_n=-1+4+(-7)+10+\cdots+(3n-2)\cdot(-1)^n$ ①，

$-S_n=\quad 1+(-4)+7+\cdots+(3n-5)\cdot(-1)^n+(3n-2)\cdot(-1)^{n+1}$ ②，

①－②，得$2S_n=-1+3+(-3)+\cdots+3\cdot(-1)^n-(3n-2)\cdot(-1)^{n+1}$．

$$=-1+\frac{3(1-(-1)^{n-1})}{1-(-1)}+(3n-2)\cdot(-1)^n=\frac{1+(6n-1)\cdot(-1)^n}{2}$$

即 $S_n=\dfrac{1+(6n-1)\cdot(-1)^n}{4}\ (n\in N^+)$.

21．甲、乙两名运动员进行五局三胜制的乒乓球比赛，先赢得 3 局的运动员获胜，并结束比赛．设各局比赛的结果相互独立，每局比赛甲赢的概率为$\dfrac{2}{3}$，乙赢的概率为$\dfrac{1}{3}$.

(1)求甲获胜的概率；

(2)设 X 为结束比赛所需要的局数，求随机变量 X 的分布列及数学期望．

【答案】(1) $p=\dfrac{64}{81}$；(2) $E(X)=\dfrac{107}{27}$.

【解析】解：(1)记 A 事件："甲获得胜利"；则其中包含了3个不同类别

A_1 事件："甲 $3:0$ 获得胜利"，则 $P(A_1)=(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{8}{27}$；

A_2 事件："甲 $3:1$ 获得胜利"则 $P(A_2)=C_3^2\cdot(\dfrac{2}{3})^2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$；

A_3 事件："甲 $3:2$ 获得胜利"则 $P(A_3)=C_4^2\cdot(\dfrac{2}{3})^2\cdot(\dfrac{1}{3})^2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{81}$；

故 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\dfrac{8}{27}+\dfrac{8}{27}+\dfrac{16}{81}=\dfrac{64}{81}$.

(2)比赛所需要的局数 $X=3,4,5$.

$P(X=3)=(\dfrac{2}{3})^3+(\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{8}{27}+\dfrac{1}{27}=\dfrac{1}{3}$;

$P(X=4)=C_3^2(\dfrac{2}{3})^2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}+C_3^1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot(\dfrac{1}{3})^2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{27}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{10}{27}$;

$P(X=5)=C_4^2\cdot(\dfrac{2}{3})^2\cdot(\dfrac{1}{3})^2\cdot\dfrac{2}{3}+C_4^2\cdot(\dfrac{2}{3})^2\cdot(\dfrac{1}{3})^2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{27}$.

故随机变量 X 的概率分布列为

X	3	4	5
P	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{10}{27}$	$\dfrac{8}{27}$

函数期望 $E(X)=3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{10}{27}+5\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{107}{27}$.

22．已知椭圆 C 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，直线 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$ 交 C 于 A、B 两点，$|AB|=2\sqrt{7}$，四边形 AF_1BF_2 的面积为 $4\sqrt{3}$.

(1)求 c；

(2)求 C 的方程.

【答案】(1) $c=\sqrt{3}$；(2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$.

【解析】解：(1)由椭圆的对称性可知 $|OA|=|OB|=\frac{1}{2}|AB|=\sqrt{7}$，

不妨设 $A(x_1,y_1)(x_1>0)$，则 $B(-x_1,-y_1)$；

由点 $A(x_1,y_1)$ 在直线 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$ 上，且 $|OA|=\sqrt{7}$，得 $\begin{cases} y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1, \\ x_1^2+y_1^2=7. \end{cases}$

解得：$\begin{cases} x_1=\sqrt{3}, \\ y_1=2. \end{cases}$ 故 $A(\sqrt{3},2)$，$B(-\sqrt{3},-2)$，

由对称性知四边形 AF_1BF_2 为平行四边形，

由 $S_{AF_1BF_2}=2S_{\Delta F_1AF_2}=2\times\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_1|=4c=4\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$

(2)设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由(1)知，$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(c,0)$.

由椭圆定义 $2a=|AF_1|+|AF_2|=2+4=6$，故 $a=3$.

又 $c=\sqrt{3}$，故 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{6}$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$.